

# Soluciones libres de envidia para el problema del alquiler de apartamentos por tres estudiantes

Francisco Sánchez Sánchez

Centro de Investigación en Matemáticas. A.C.

XXX Coloquio Mexicano en Economía Matemática y  
Econometría  
Noviembre 26, 2020

## Problema

Tenemos 3 estudiantes que desean compartir el alquiler de un apartamento. Hay un problema. Los dormitorios tienen características diferentes.

- ▶ ¿Cómo se asignan los dormitorios?
- ▶ ¿Cuánto pagará cada uno?

## Resultados

- ▶ Se encuentran todas las soluciones libres de envidia.

## Resultados

- ▶ Se encuentran todas las soluciones libres de envidia.
- ▶ Dada una asignación eficiente, se encuentran todos los puntos extremos del conjunto de precios que conforman estas soluciones.

## Resultados

- ▶ Se encuentran todas las soluciones libres de envidia.
- ▶ Dada una asignación eficiente, se encuentran todos los puntos extremos del conjunto de precios que conforman estas soluciones.
- ▶ Se sugiere como solución una asignación eficiente junto con el centroide del conjunto de precios.

## Resultados

- ▶ Se encuentran todas las soluciones libres de envidia.
- ▶ Dada una asignación eficiente, se encuentran todos los puntos extremos del conjunto de precios que conforman estas soluciones.
- ▶ Se sugiere como solución una asignación eficiente junto con el centroide del conjunto de precios.
- ▶ Se propone un mecanismo para implementar la solución.

## Resultados

- ▶ Se encuentran todas las soluciones libres de envidia.
- ▶ Dada una asignación eficiente, se encuentran todos los puntos extremos del conjunto de precios que conforman estas soluciones.
- ▶ Se sugiere como solución una asignación eficiente junto con el centroide del conjunto de precios.
- ▶ Se propone un mecanismo para implementar la solución.
- ▶ La solución no depende de la asignación eficiente elegida.

## Bosquejo

- ▶ Cada estudiante propone una distribución del alquiler de  $v$ , que el estudiante cree que es justo.

## Bosquejo

- ▶ Cada estudiante propone una distribución del alquiler de  $v$ , que el estudiante cree que es justo.
- ▶ Se hace notar que para tener una solución libre de envidia es necesario que la asignación sea eficiente.

## Bosquejo

- ▶ Cada estudiante propone una distribución del alquiler de  $v$ , que el estudiante cree que es justo.
- ▶ Se hace notar que para tener una solución libre de envidia es necesario que la asignación sea eficiente.
- ▶ Suponiendo una asignación eficiente se elige la distribución del alquiler de tal manera que los estudiantes prefieran los cuartos que les asigna esa distribución eficiente.

## Bosquejo

- ▶ Cada estudiante propone una distribución del alquiler de  $v$ , que el estudiante cree que es justo.
- ▶ Se hace notar que para tener una solución libre de envidia es necesario que la asignación sea eficiente.
- ▶ Suponiendo una asignación eficiente se elige la distribución del alquiler de tal manera que los estudiantes prefieran los cuartos que les asigna esa distribución eficiente.
- ▶ Para ello, para cada estudiante se divide el simplex en zonas, de modo que el estudiante prefiere la misma habitación o habitaciones en toda la zona. Esto permite encontrar el conjunto de distribuciones de la renta que junto con la asignación eficiente forman las soluciones libres de envidia.

## Bosquejo

- ▶ Cada estudiante propone una distribución del alquiler de  $v$ , que el estudiante cree que es justo.
- ▶ Se hace notar que para tener una solución libre de envidia es necesario que la asignación sea eficiente.
- ▶ Suponiendo una asignación eficiente se elige la distribución del alquiler de tal manera que los estudiantes prefieran los cuartos que les asigna esa distribución eficiente.
- ▶ Para ello, para cada estudiante se divide el simplex en zonas, de modo que el estudiante prefiere la misma habitación o habitaciones en toda la zona. Esto permite encontrar el conjunto de distribuciones de la renta que junto con la asignación eficiente forman las soluciones libres de envidia.
- ▶ Finalmente, se encuentran los puntos extremos del conjunto de distribuciones y se proponen su centroide como solución al problema.



## Preferencias de un estudiante

- ▶  $v^k$  distribución de la renta propuesta por el estudiante  $k$ .

## Preferencias de un estudiante

- ▶  $v^k$  distribución de la renta propuesta por el estudiante  $k$ .
- ▶  $p$  distribución usada.

## Preferencias de un estudiante

- ▶  $v^k$  distribución de la renta propuesta por el estudiante  $k$ .
- ▶  $p$  distribución usada.
- ▶ Suponemos utilidades cuasi lineales en las preferencias de los estudiantes:

$$Ch_k(p) = \{i | v_i^k - p_i \geq v_j^k - p_j, j = 1, 2, 3\}$$

## Preferencias de un estudiante

- ▶ **Proposición.** *Hay un único punto  $p \in \Delta$  donde el estudiante  $k$  es indiferente entre las 3 recamaras. Este es  $p = v^k$ .*

## Preferencias de un estudiante

- ▶ **Proposición.** *Hay un único punto  $p \in \Delta$  donde el estudiante  $k$  es indiferente entre las 3 recamaras. Este es  $p = v^k$ .*
- ▶ Direcciones de interés.

$$d^1 = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$$

$$d^2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)^T$$

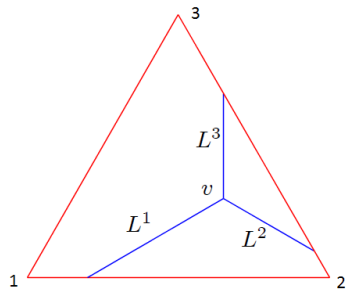
$$d^3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$$

## Preferencias de un estudiante

**Proposición.** Sea  $v$  la distribución propuesta por el estudiante  $k$  y  $p \in \Delta$ , entonces,

- a)  $Ch_k(p) = \{2, 3\}$  si y sólo si existe  $\alpha > 0$  tal que  $p = v + \alpha d^1 \in \Delta$ .
- b)  $Ch_k(p) = \{1, 3\}$  si y sólo si existe  $\beta > 0$  tal que  $p = v + \beta d^2 \in \Delta$ .
- c)  $Ch_k(p) = \{1, 2\}$  si y sólo si existe  $\gamma > 0$  tal que  $p = v + \gamma d^3 \in \Delta$ .

## Preferencias de un estudiante



## Preferencias de un estudiante

- ▶ Para  $l \in M$ , y  $i, j \in M$  las otras dos recamaras diferentes a  $l$ , sean

$$\Delta^l(v) = \{p \mid \text{existen } \alpha, \beta > 0 \text{ tales que } p = v + \alpha d^i + \beta d^j \in \Delta\}.$$

## Preferencias de un estudiante

- ▶ Para  $l \in M$ , y  $i, j \in M$  las otras dos recamaras diferentes a  $l$ , sean

$$\Delta^l(v) = \{p \mid \text{existen } \alpha, \beta > 0 \text{ tales que } p = v + \alpha d^i + \beta d^j \in \Delta\}.$$

- ▶ **Proposición.** *Sea  $v$  la distribución propuesta por el estudiante  $k$  y  $p \in \Delta$ , entonces,*

## Preferencias de un estudiante

- ▶ Para  $l \in M$ , y  $i, j \in M$  las otras dos recamaras diferentes a  $l$ , sean

$$\Delta^l(v) = \{p \mid \text{existen } \alpha, \beta > 0 \text{ tales que } p = v + \alpha d^i + \beta d^j \in \Delta\}.$$

- ▶ **Proposición.** *Sea  $v$  la distribución propuesta por el estudiante  $k$  y  $p \in \Delta$ , entonces,*

a)  $Ch_k(p) = \{1\}$  si y sólo si  $p \in \Delta^1(v^k)$ .

## Preferencias de un estudiante

- ▶ Para  $l \in M$ , y  $i, j \in M$  las otras dos recamaras diferentes a  $l$ , sean

$$\Delta^l(v) = \{p \mid \text{existen } \alpha, \beta > 0 \text{ tales que } p = v + \alpha d^i + \beta d^j \in \Delta\}.$$

- ▶ **Proposición.** *Sea  $v$  la distribución propuesta por el estudiante  $k$  y  $p \in \Delta$ , entonces,*
  - $Ch_k(p) = \{1\}$  si y sólo si  $p \in \Delta^1(v^k)$ .
  - $Ch_k(p) = \{2\}$  si y sólo si  $p \in \Delta^2(v^k)$ .

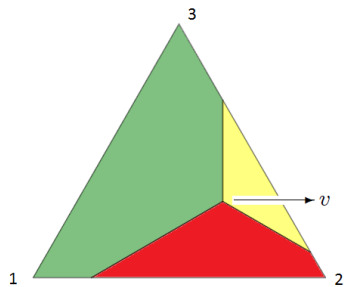
## Preferencias de un estudiante

- ▶ Para  $l \in M$ , y  $i, j \in M$  las otras dos recamaras diferentes a  $l$ , sean

$$\Delta^l(v) = \{p \mid \text{existen } \alpha, \beta > 0 \text{ tales que } p = v + \alpha d^i + \beta d^j \in \Delta\}.$$

- ▶ **Proposición.** *Sea  $v$  la distribución propuesta por el estudiante  $k$  y  $p \in \Delta$ , entonces,*
  - $Ch_k(p) = \{1\}$  si y sólo si  $p \in \Delta^1(v^k)$ .
  - $Ch_k(p) = \{2\}$  si y sólo si  $p \in \Delta^2(v^k)$ .
  - $Ch_k(p) = \{3\}$  si y sólo si  $p \in \Delta^3(v^k)$ .

## Preferencias de un estudiante



## Preferencias de un estudiante

Otra forma de verlo es la siguiente: transforme el vector  $p-v$  en coordenadas cartesianas (ya sea  $\mathbb{R}^2$  o incrustadas en el simplex en  $\mathbb{R}^3$ ) e imagine que este vector es la manecilla de la hora de un reloj. Si el vector apunta entre las 12:00 y las 4:00, el alumno prefiere la habitación 1. Si apunta entre las 4:00 y las 8:00, el alumno prefiere la habitación 3. Si apunta entre las 8:00 y las 12:00, el estudiante prefiere la habitación 2. Si el vector apunta a las 12:00, el estudiante favorece igualmente las habitaciones 1 y 2, cualquiera de las cuales es mejor que la habitación 3. Situaciones similares ocurren si el vector apunta a las 4:00 u 8:00.

## Soluciones libres de envidia

- ▶ Sea  $\mathcal{A} := \{\mu : M \rightarrow N \mid \mu \text{ biyectiva}\}$  el conjunto de asignaciones. Al estudiante  $\mu(i)$  se le asigna la recamara  $i$ .

## Soluciones libres de envidia

- ▶ Sea  $\mathcal{A} := \{\mu : M \rightarrow N \mid \mu \text{ biyectiva}\}$  el conjunto de asignaciones. Al estudiante  $\mu(i)$  se le asigna la recamara  $i$ .
- ▶ **Definición.** Se dice que  $\mu$  es una asignación eficiente si y sólo si

$$\sum_{i \in M} v_i^{\mu(i)} \geq \sum_{i \in M} v_i^{\bar{\mu}(i)}$$

para toda  $\bar{\mu} \in \mathcal{A}$ . Sea  $E$  el conjunto de asignaciones eficientes.

## Soluciones libres de envidia

- **Definición.** Diremos que la pareja  $(\mu, p)$  es libre de envidias si y sólo si

$$v_i^{\mu(i)} - p_i \geq v_j^{\mu(i)} - p_j$$

para todo  $i, j \in M$ .

## Soluciones libres de envidia

- ▶ **Definición.** Diremos que la pareja  $(\mu, p)$  es libre de envidias si y sólo si

$$v_i^{\mu(i)} - p_i \geq v_j^{\mu(i)} - p_j$$

para todo  $i, j \in M$ .

- ▶ **Lema.** Si  $(\mu, p)$  es libre de envidias entonces  $\mu$  es una asignación eficiente.

## Soluciones libres de envidia



$Ef = \{p | (\mu, p) \text{ es libre de envidias con } \mu \text{ asignación eficiente}\}.$



## Soluciones libres de envidia

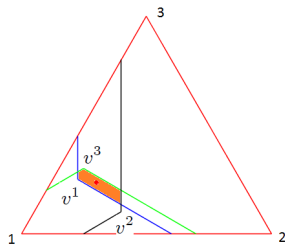
Alternativamente, para que cada estudiante prefiera la recamara que  $\mu$  le asigna, debe suceder que

- ▶  $p - v^1$  debe apuntar entre las 12:00 y 4:00 hs.
- ▶  $p - v^2$  debe apuntar entre las 8:00 y 12:00 hs.
- ▶  $p - v^3$  debe apuntar entre las 4:00 y 8:00 hs.

**Teorema.**  $p \in Ef$  si y sólo si  $p \in \bigcap_{k \in M} \overline{\Delta^k(v^{\mu(k)})}$ .

## Ejemplo 1

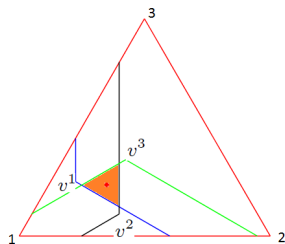
$$v^1 = \left[ \frac{13}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4} \right] \quad v^2 = \left[ \frac{11}{20}, \frac{7}{20}, \frac{1}{10} \right] \quad v^3 = \left[ \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10} \right]$$

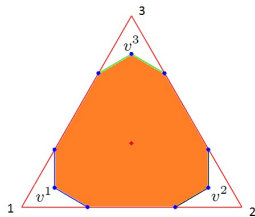


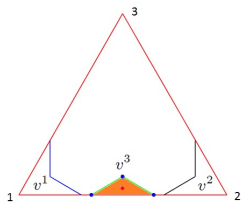
## Ejemplo 2

Cambiando  $v^3$  a

$$v^3 = \left[ \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{7}{20} \right]$$







- ▶ **Proposición.** Sean  $i, j \in N$ , con  $i \neq j$ , y  $r, s, t \in M$  diferentes, y  $p \in \Delta$ . Si  $Ch_i(p) = \{r, s\}$  y  $Ch_j(p) = \{r, t\}$  entonces  $p \in Ef$ .

- ▶ **Proposición.** Sean  $i, j \in N$ , con  $i \neq j$ , y  $r, s, t \in M$  diferentes, y  $p \in \Delta$ . Si  $Ch_i(p) = \{r, s\}$  y  $Ch_j(p) = \{r, t\}$  entonces  $p \in Ef$ .



$$p = v^2 + \alpha d^1 = v^1 + \beta d^2$$

- ▶ **Proposición.** Sean  $i, j \in N$ , con  $i \neq j$ , y  $r, s, t \in M$  diferentes, y  $p \in \Delta$ . Si  $Ch_i(p) = \{r, s\}$  y  $Ch_j(p) = \{r, t\}$  entonces  $p \in Ef$ .



$$p = v^2 + \alpha d^1 = v^1 + \beta d^2$$

- ▶  $K = \{(1221), (1223), (1321), (1231), (1331), (1332), (2132), (2331), (2332)\}$ .

- a) Encuentra los puntos extremos del tipo I:
- ▶ Si  $v^k$ ,  $k \in N$ , es un precio libre de envidias, entonces  $v^k$  es un punto extremo de  $Ef$ .
  - ▶ Si la intersección de  $\Delta^k(v^k)$  con la frontera de  $\Delta$  es libre de envidias, entonces ese punto es un punto extremo de  $Ef$ .
- b) Encuentra los puntos extremos del tipo II: Para cada  $(i, j, k, l) \in K$ , resuelva el sistema de ecuaciones

$$v^i + \alpha d^k = v^j + \beta d^l$$

y cheque si el precio correspondiente  $p$  es libre de envidias. En cada caso es suficiente calcular

$$\alpha = \frac{2}{3}(v_l^j - v_l^i) + \frac{4}{3}(v_k^j - v_k^i),$$

calcule  $p = v^i + \alpha d^k$  y verifique que sus coordenadas son no negativas.

## Implementación

1. Cada estudiante propone una forma de repartir la renta:  $v^k$ ,  $k \in N$ . La que piense que es justa.
2. Se encuentra una asignación eficiente.
3. Se encuentran los puntos extremos de  $Ef$ .
4. Tome el promedio de los puntos extremos como solución.

## El caso donde hay más de una asignación eficiente

**Proposición.** Sea  $\bar{\mu}$  una asignación eficiente y  $(\mu, p)$  una pareja libre de envidias. Entonces la pareja  $(\bar{\mu}, p)$  es libre de envidias.

Además,

$$v_i^{\mu(i)} - p_i = v_k^{\bar{\mu}(k)} - p_k$$

para  $i \in N$  y  $k$  tal que  $\bar{\mu}(k) = \mu(i)$ .

## Referencias

-  Abdulkadiroğlu A., Sönmez T., Utku Ünver M. , 2004. Room assignment-rent division: A market approach. *Social Choice Welfare*, 22: 515–538.
-  Francis Edward Su, 1999. Rental Harmony\_ Sperners Lemma in Fair Division. *Amer. Math. Monthly*, 106, 930-942.
-  3B1B 3Blue1Brown NYT: Sperner's lemma defeats the rental harmony problem.  
<https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME>.
-  PBS Infinite Series. Splitting Rent with Triangles. Infinite Series.  
<https://www.youtube.com/watch?v=48oBEvpdYSE>.
-  The New York Times. To divide the rent. Start with a triangle. Divide your rent fairly. April 28, 2014.  
<https://www.nytimes.com/interactive/2014/04/28/science/rent>